Αριθμητική γραμμική άλγεβρα

8/10/15

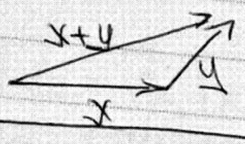
Βιβλίο: κ. Δουγαλή, Νούτσου, Χατζηδήμου

Νόρμες διανυσμάτων

Νόρμα διανύσματος $\|\cdot\|$ είναι μια απεικόνιση $\|\cdot\|: \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+$, ο τέτοια ώστε:

1) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0$ αν $x=0$, $\forall x \in \mathbb{C}^n$.
3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x,y \in \mathbb{C}^n$. (τριγωνική) ⊛
2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{C}^n$
↳ εκτός $\{0\}$.

⊛



Για οποιαδήποτε νόρμα ισχύουν αυτές οι 3 ιδιότητες.

Ορισμός: Μια ακολουθία διανυσμάτων $x^1, x^2, \dots \{x^i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^n$ συγκλίνει στο $x \in \mathbb{C}^n$, αν $\lim_{i\to\infty} x_j^i = x_j$, $j=1,\dots,n$

Θεώρημα: Μια ακολουθία διανυσμάτων $x^1, x^2, \dots (\{x^i\}_{i=1}^{\infty}) \in \mathbb{C}^n$ συγκλίνει στο $x \in \mathbb{C}^n$ αν $\lim_{i\to\infty} \|x^i - x\| = 0$, $\forall$ νόρμα $\|\cdot\|$.

l_1 νόρμα: $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$

l_∞ νόρμα: $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$

l_2 νόρμα: $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n (x_i)^2\right)^{1/2}$ ευκλείδια

$\|\lambda x\|_1 = \sum_{i=1}^n |\lambda x_i| = |\lambda| \cdot \sum_{i=1}^n |x_i| = |\lambda| \cdot \|x\|_\infty$

$\|x+y\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| = \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1$

$\|\lambda x\|_\infty = \max_i |\lambda x_i| = |\lambda| \cdot \max_i |x_i| = |\lambda| \cdot \|x\|_\infty$

$\|x+y\|_\infty = \max_i |x_i + y_i| = |x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k|$
$\leq \max_i |x_i| + \max_i |y_i| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$.

$$\|\lambda x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |\lambda x_i|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n |\lambda|^2 |x_i|^2\right)^{1/2} = |\lambda| \cdot \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2} = |\lambda| \cdot \|x\|_2$$

Ορισμός: Ευκλείδιο εσωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων $x, y \in \mathbb{C}^n$ ορίζεται ως η απεικόνιση $(\cdot,\cdot)_2: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε:

$$(x,y)_2 = \sum_{i=1}^n \overline{x_i} \cdot y_i$$

$(x,x)_2 = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i}\cdot x_i = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = \|x\|_2^2$

$(x+y, z+w) = (x,z) + (x,w) + (y,z) + (y,w)$.

$(x,y) = \overline{(y,x)}$

<u>Ανισότητα Cauchy-Schwarts</u>: Για κάθε $x,y \in \mathbb{C}^n$ ισχύει
$|(x,y)| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$.

<u>Απόδειξη</u>: Ισχύει για $x=0$ ή $y=0$. Έστω $x,y \neq 0$. Θεωρούμε την ποσότητα
$0 \leq \sum_{i=1}^{n} (\theta|x_i| + |y_i|)^2, \theta \in \mathbb{R}$.

$0 \leq \sum_{i=1}^{n} (\theta|x_i| + |y_i|)^2 = \theta^2 \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 + \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 + 2\theta \sum_{i=1}^{n} |x_i|\cdot|y_i|$ Η διακρίνουσα τριωνύμου είναι μη αρνητική.

$0 \geq \frac{D}{4} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\cdot|y_i|\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\right) \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} |\overline{x_i} y_i|\right)^2 \leq \|x\|_2^2 \cdot \|y\|_2^2$

$\Leftrightarrow \sum |\overline{x_i} y_i| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$

$\rightarrow |(x,y)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |\overline{x_i}\cdot y_i| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$.

$\rightarrow \|x+y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$, $\|x+y\|_2^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y)$
$= \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2\,\mathrm{Re}(x,y)$.

$(\|x\|_2 + \|y\|_2)^2 = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2\|x\|_2 \cdot \|y\|_2$

$\mathrm{Re}(x,y) \leq |(x,y)| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$

Δυο νόρμες $\|x\|_a$, $\|x\|_b$ είναι ισοδύναμες ή συμμετρικές αν για κάθε $x \in \mathbb{C}^n$ υπάρχουν $c_1, c_2 > 0$, τέτοιοι ώστε $c_1 \cdot \|x\|_a \leq \|x\|_b \leq c_2 \|x\|_a$.

<u>Θεώρημα</u>: Όλες οι νόρμες στον $\mathbb{C}^n$ είναι μεταξύ τους ισοδύναμες.

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|x_i| = \sum_{i=1}^{n}|x_i|\cdot 1 = (|x|, e) \leq \|x\|_2 \cdot \|e\|_2 = \sqrt{n}\,\|x\|_2$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{1/2} \leq \left(\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|\right)^2\right)^{1/2} = \sum_{i=1}^{n}|x_i| = \|x\|_1$$

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\cdot\|x\|_2$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$$

$$e^i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i \quad , \|e^i\|_2 = \|e^i\|_1 \quad , \|e\|_1 = n , \|e\|_2 = \sqrt{n}$$

$$\|e\|_1 = \sqrt{n}\cdot\|e\|_2$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}\max_j|x_j|^2\right)^{1/2} = \max|x_j|\left(\sum_{i=1}^{n}1\right)^{1/2} = \sqrt{n}\cdot\|x\|_\infty$$

$$\|x\|_\infty = \max_i|x_i| = (\max_i|x_i|^2)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{1/2} = \|x\|_2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\cdot\|x\|_\infty$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_2 \leq \|x\|_\infty \leq \|x\|_2$$

$$\rightarrow \|e\|_2 = \sqrt{n}\,\|e\|_\infty$$

$$\rightarrow \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|x_i| \leq \sum_{i=1}^{n}\max_j|x_j| = \|x\|_\infty\sum_{i=j}^{n}1 = n\|x\|_\infty$$

$$\|x\|_\infty = \max_i|x_i| \leq \sum_{i=1}^{n}|x_i| = \|x\|_1$$

$$\left.\right\} \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty \qquad \frac{1}{n}\|x\|_1 \leq \|x\| \leq \|x\|_1$$

$$\|e\|_\infty = 1 , \|e\|_1 = n \qquad \|e\|_1 = n\|e\|_\infty$$

l_p νόρμα $= \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}$ ↳ για $p \geq 1$.

$\lim_{p\to\infty}\|x\|_p = \|x\|_\infty \rightsquigarrow$ ασκ. σπίτι.

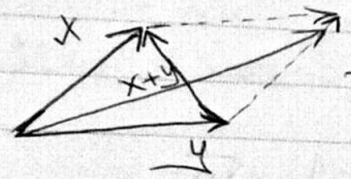
$x,y \in \mathbb{R}^n \qquad |(x,y)| \leq \|x\|_2\cdot\|y\|_2 \;, \cos\theta = \dfrac{(x,y)}{\|x\|_2\cdot\|y\|_2} \;, \theta = (\widehat{x,y})$

Δύο διανύσματα x,y είναι ορθογώνια αν $(x,y)=0$.

Ασκ

Έστω $x, y \in \mathbb{R}^n$ γραμ. ανεξ. με $\|x\|_2 = \|y\|_2$. Να δειχθεί ότι τα διανύσματα $x+y$ και $x-y$ είναι ορθογώνια.

$$(x+y, x-y) = (x,x) - (x,y) + (y,x) - (y,y) = (x,x) - (x,y) + (y,x) - (y,y)$$
$$= \|x\|_2^2 - \|y\|_2^2 = 0$$



ρόμβος | μας δείχνει ότι οι διαγ. ενός ρόμβου είναι κάθετοι μεταξύ τους.

Ασκ

Για κάθε διανυσματική νόρμα ισχύει ότι $\big|\,\|x\| - \|y\|\,\big| \le \|x-y\|$

$x = y + x - y \Rightarrow \|x\| = \|y + x - y\| \le \|y\| + \|x-y\| \Leftrightarrow \|x\| - \|y\| \le \|x-y\|$ $\Big\} \Rightarrow$

$y = x + y - x \Rightarrow$ αντιστοίχως $\Leftrightarrow \|y\| - \|x\| \le \|y-x\| = \|x-y\|$

$\Leftrightarrow \big|\,\|x\| - \|y\|\,\big| \le \|x-y\|$

Ασκ

Να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση $f(x) = \sum_{i=1}^{n} i|x_i|$ είναι νόρμα, ενώ η $g(x) = \sum_{i=1}^{n} (i-1)|x_i|$ δεν είναι.

$g(e^1) = 0$ εν $e^1 \neq 0$, δεν ισχύει η(1)

Τα άλλα 2 ισχύουν. Βγαίνουν εύκολα.

Πίνακες + διανύσματα μπαίνουν στις εξετάσεις.